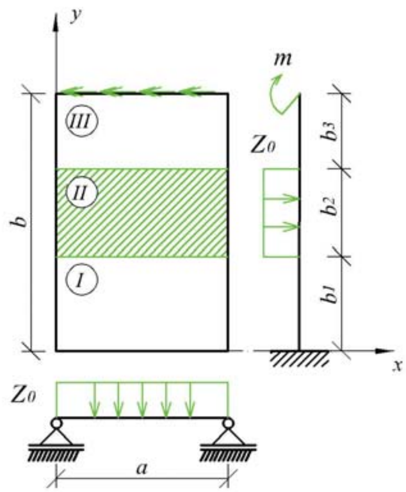
Пример 5.

За плочу оптерећену константним површинским оптерећењем и константним линијским моментима савијања $\boldsymbol{m}$, приказану на слици, одредити изразе за угиб и пресечне силе.



Решење

Због скоковитог оптерећења у $\boldsymbol{y}$- правцу, да бисмо могли да користимо *Морис- Леви*-јево решење, плоча мора да се подели на три дела:

$$w_I(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty}\left[\left(A_n^I+\frac{n\pi y}{a}\cdot B_n^I\right)\cdot ch\frac{n\pi y}{a}+\left(C_n^I+\frac{n\pi y}{a}\cdot D_n^I\right)\cdot sh\frac{n\pi y}{a}\right]\cdot\sin\frac{n\pi x}{a}$$

$$w_{II}(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{Z_n\cdot a^4}{K\cdot n^4\cdot\pi^4}+\left(A_n^{II}+\frac{n\pi y}{a}\cdot B_n^{II}\right)\cdot ch\frac{n\pi y}{a}+\left(C_n^{II}+\frac{n\pi y}{a}\cdot D_n^{II}\right)\cdot sh\frac{n\pi y}{a}\right]\cdot\sin\frac{n\pi x}{a}$$

$$w_{III}(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty}\left[\left(A_n^{III}+\frac{n\pi y}{a}\cdot B_n^{III}\right)\cdot ch\frac{n\pi y}{a}+\left(C_n^{III}+\frac{n\pi y}{a}\cdot D_n^{III}\right)\cdot sh\frac{n\pi y}{a}\right]\cdot\sin\frac{n\pi x}{a}$$

Гранични услови:

$$y=0\quad\begin{cases}w^I=0.............(1)\\ \dfrac{\partial w^I}{\partial y}=0..........(2)\end{cases}\qquad\qquad y=b\quad\begin{cases}\overline{T}_y^{III}=0.............(3)\\ M_y^{III}=-m..........(4)\end{cases}$$

Линијски момент савијања $\boldsymbol{m}$ мора да се апроксимира синусним тригонометријским редом:

$$m(x)=\sum_{n=1}^{\infty}m_n\cdot\sin\frac{n\pi x}{a}$$

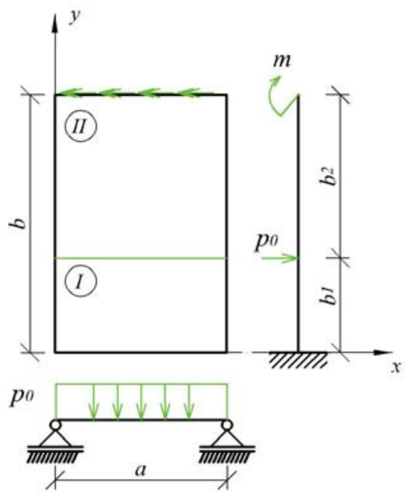
$m_n=\dfrac{2}{a}\displaystyle\int_0^a m\cdot\sin\frac{n\pi x}{a}dx$ да би систем једначина могао да се реши.

Прелазни услови:

$$y=b_1\quad\begin{cases}w^I=w^{II}.................(5)\\ \dfrac{\partial w^I}{\partial y}=\dfrac{\partial w^{II}}{\partial y}\quad..........(6)\\ M_y^I=M_y^{II}\quad.............(7)\\ \overline{T}_y^I=\overline{T}_y^{II}.................(8)\end{cases}\qquad\qquad y=b_1+b_2\quad\begin{cases}w^{II}=w^{III}.................(9)\\ \dfrac{\partial w^{II}}{\partial y}=\dfrac{\partial w^{III}}{\partial y}\quad..........(10)\\ M_y^{II}=M_y^{III}\quad.............(11)\\ \overline{T}_y^{II}=\overline{T}_y^{III}.................(12)\end{cases}$$

Пример 6.

За плочу оптерећену константним линијским оптерећењем $\boldsymbol{p_0}$ и моментима савијања $\boldsymbol{m}$, приказану на слици, одредити изразе за угиб и пресечне силе.



Решење

Оптерећење у $\boldsymbol{y}$- правцу није константно,постоји линијско оптерећење за $\boldsymbol{y = b_1}$.Да бисмо могли да користимо *Морис- Леви*-јево решење, плоча мора да се подели на два дела:

$$w_I(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty}\left[\left(A_n^I + \frac{n\pi y}{a}\cdot B_n^I\right)\cdot ch\frac{n\pi y}{a} + \left(C_n^I + \frac{n\pi y}{a}\cdot D_n^I\right)\cdot sh\frac{n\pi y}{a}\right]\cdot \sin\frac{n\pi x}{a}$$

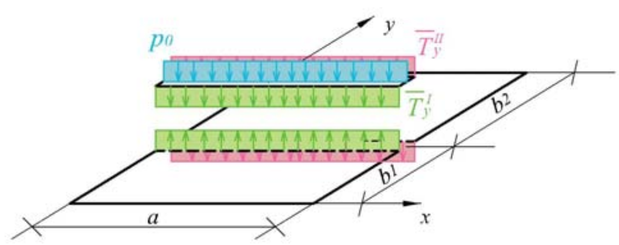
$$w_{II}(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty}\left[\left(A_n^{II} + \frac{n\pi y}{a}\cdot B_n^{II}\right)\cdot ch\frac{n\pi y}{a} + \left(C_n^{II} + \frac{n\pi y}{a}\cdot D_n^{II}\right)\cdot sh\frac{n\pi y}{a}\right]\cdot \sin\frac{n\pi x}{a}$$

Гранични услови:

$$y = 0 \begin{cases} w^I = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots(1) \\ \dfrac{\partial w^I}{\partial y} = 0 \ldots\ldots\ldots(2) \end{cases} \qquad y = b \begin{cases} \overline{T}_y^{II} = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots(3) \\ M_y^{II} = -m \ldots\ldots\ldots\ldots(4) \end{cases}$$

Прелазни услови:

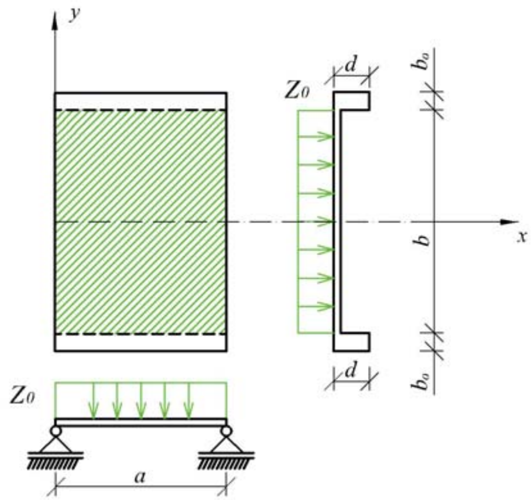
$$y = b_1 \begin{cases} w^I = w^{II} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(5) \\ \dfrac{\partial w^I}{\partial y} = \dfrac{\partial w^{II}}{\partial y} \quad \ldots\ldots\ldots(6) \\ M_y^I = M_y^{II} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots(7) \\ \overline{T}_y^I - \overline{T}_y^{II} = p_0 \ldots\ldots\ldots(8) \end{cases}$$



Линијски оптерећење $\boldsymbol{p_0}$ и момент савијања $\boldsymbol{m}$ морају да се апроксимирају синусним тригонометријским редом да систем једначина могао да се реше.

Пример 7.

За правоугаону плочу која је на две паралелне ивице еластично ослоњена и укљештена у греду, приказану на слици , одредити израз за угиб.



Решење

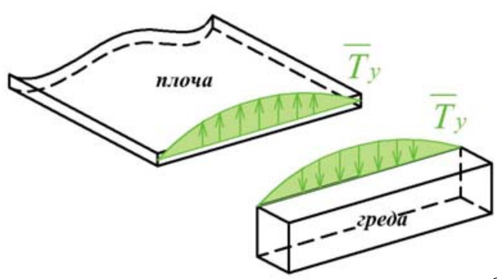
$$w(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{Z_n\cdot a^4}{K\cdot n^4\cdot\pi^4}+A_n\cdot ch\frac{n\pi y}{b}+\frac{n\pi y}{b}\cdot D_n\cdot sh\frac{n\pi y}{b}\right]\cdot\sin\frac{n\pi x}{a}$$

<u>*Гранични услови:*</u>

$$y=\frac{b}{2}\quad\begin{cases}w^p=w^g\text{..........(1)}\\[4pt]\dfrac{\partial w^p}{\partial y}=\varphi^g\text{........(2)}\end{cases}$$

Једначину ***(1)*** четири пута диференцирамо по ***x*** координати:

$$\frac{\partial^4 w^p}{\partial x^4}=\frac{d^4 w^g}{dx^4}$$



Услови равнотеже греде:

$$\frac{dT}{dx}=-p=-\overline{T}_y$$

$\dfrac{dM}{dx}=T$, овај израз диференцирамо по ***x*** координати и добијамо: $\dfrac{d^2M}{dx^2}=\dfrac{dT}{dx}=-\overline{T}_y$

Веза између ***M***- *савијања* и кривине код греде:

$M=-EI_g\cdot\dfrac{d^2w^g}{dx^2}$. Овај израз се два пута диференцира по ***x*** координати:

$\dfrac{d^2M}{dx^2}=-\overline{T}_y=-EI_g\cdot\dfrac{d^4w^g}{dx^4}$, односно: $\dfrac{d^4w^g}{dx^4}=\dfrac{\overline{T}_y}{EI_g}$.

(1) гранични услов се свео на:

$$\boxed{\frac{\partial^4 w^p}{\partial x^4}=\frac{\overline{T}_y}{EI_g}}\text{ ....}\mathit{(1)}$$

Сада једначину *(2)* диференцирамо по ***x*** координати:

$$\frac{\partial^2 w^p}{\partial x \partial y} = \frac{\partial \varphi^g}{\partial x} = \vartheta = \frac{M_t}{GI_t}$$, одакле следи да је: $M_t = GI_t \cdot \frac{\partial^2 w^p}{\partial x \partial y}$ где су:

ϑ - угао торзије греде

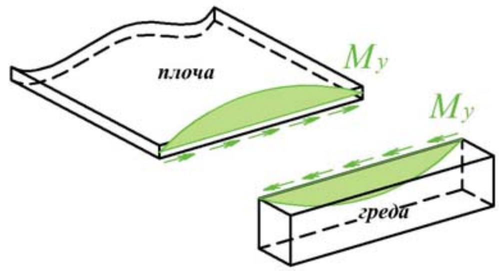
G - модул смицања

I_t - торзиони момент инерције

Момент савијања ***My*** плоче представља линијски момент савијања за греду, па је:

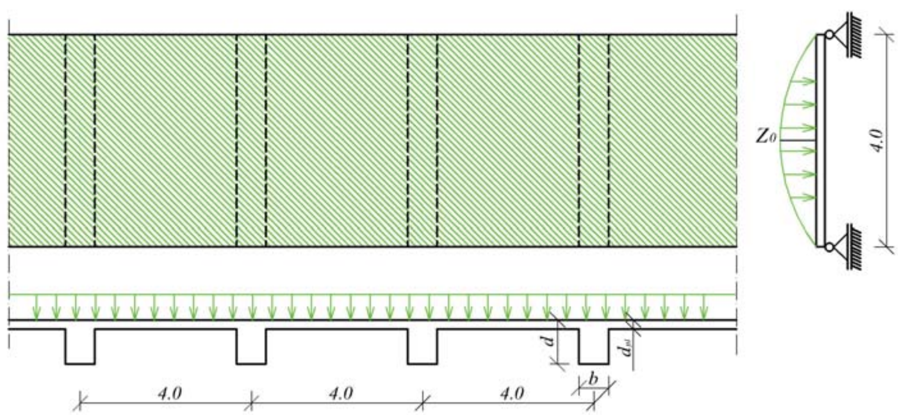
$\frac{dM_t}{dx} = M_y$, односно други гранични услов постаје:

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial x}\left(GI_t \cdot \frac{\partial^2 w^p}{\partial x \partial y}\right) = M_y} \quad ......(2)$$



Пример 8.

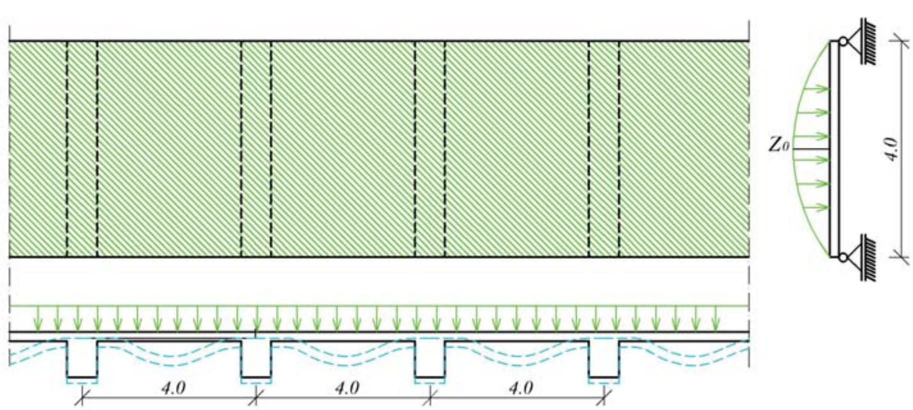
За континуалну плочу, приказану на слици, одредити изразе за угиб и пресечне силе. Површинско оптерећење се мења по синусном закону.



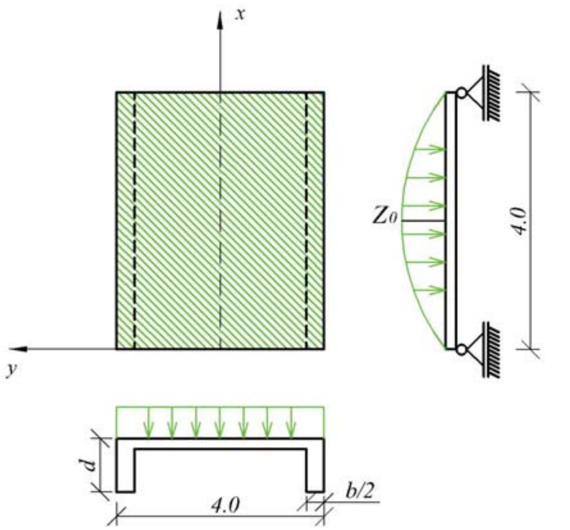
E=30 Gpa
ν= 0.15
dpl = 0.18 m
Z_0= 60 kN/m²
греда:
b/d= 30/50 cm

Решење

Прво треба да скицирамо деформисани облик континуалне плоче (плава испрекидана линија):



Сада можемо да издвојимо једно поље континуалне плоче:



Површинско оптерећење: $Z(x) = Z_0 \cdot \sin\left(\frac{\pi x}{4}\right)$

Површинско оптерећење је представљено као први члан синусног реда, па ће и израз за угиб да има само први члан реда:

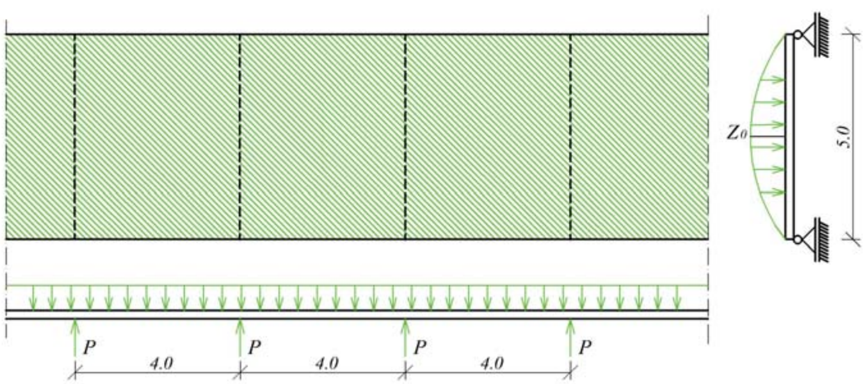
$$w(x,y) = \left[\frac{Z_0 \cdot 4^4}{K \cdot \pi^4} + A_1 \cdot ch\frac{\pi y}{4} + \frac{\pi y}{4} \cdot D_1 \cdot sh\frac{\pi y}{4}\right] \cdot \sin\frac{\pi x}{4}$$

<u>Гранични услови:</u>

$$y = 2 \quad \begin{cases} w^p = w^g \text{..........(1)} \\ \dfrac{\partial w^p}{\partial y} = 0 \text{.........(2)} \end{cases}$$

<u>Пример 9.</u>

За континуалну плочу оптерећену површинским и линијским оптерећењем, приказану на слици, одредити израз за угиб и пресечне силе. Површинско и линијско оптерећење се мењају по синусном закону.



E=30 Gpa

ν= 0.2

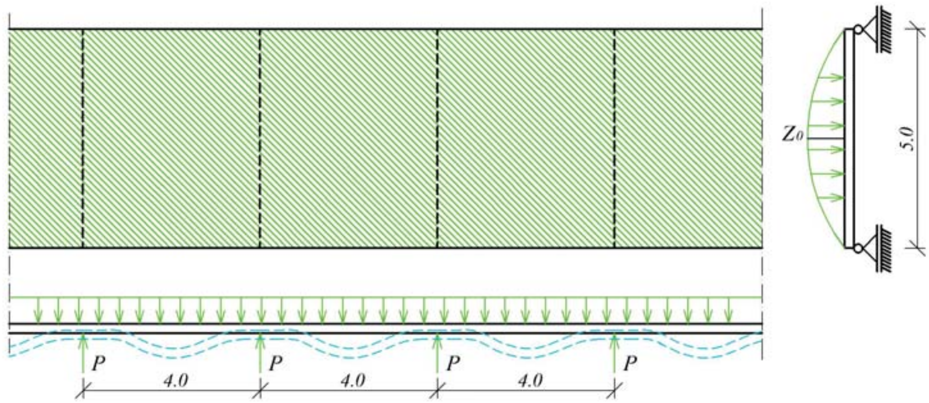
dpl = 0.15 m

Z_0= 10 kN/m^2

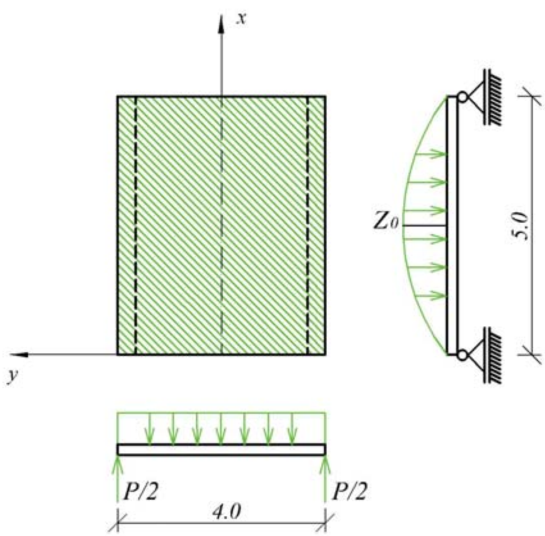
P_0= 40 kN/m

Решење

Прво треба да скицирамо деформисани облик континуалне плоче (плава испрекидана линија):



Сада можемо да издвојимо једно поље континуалне плоче:



Површинско оптерећење: $Z(x) = Z_0 \cdot \sin\left(\frac{\pi x}{4}\right)$

Линијско оптерећење: $P(x) = P_0 \cdot \sin\left(\frac{\pi x}{4}\right)$

Површинско и линијско оптерећење су представљени првим чланом синусног реда, па ће и израз за угиб имати само први члан реда:

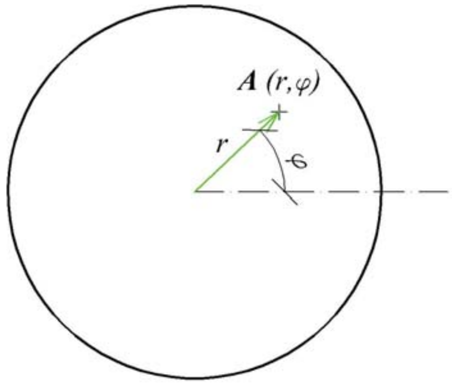
$$w(x, y) = \left[\frac{Z_0 \cdot 5^4}{K \cdot \pi^4} + A_1 \cdot ch\frac{\pi y}{5} + \frac{\pi y}{5} \cdot D_1 \cdot sh\frac{\pi y}{5}\right] \cdot \sin\frac{\pi x}{5}$$

Гранични услови:

$$y = 2 \begin{cases} \overline{T}_y = -\frac{P_0}{2} \cdot \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) \text{..........(1)} \\ \frac{\partial w^p}{\partial y} = 0 \text{..........................(2)} \end{cases}$$

Савијање кружних плоча

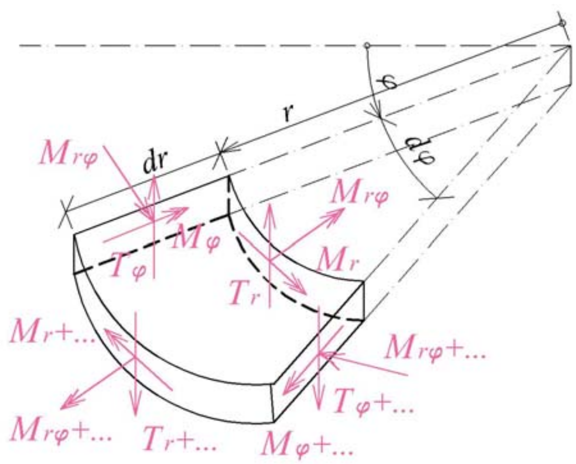
Положај сваке тачке кружне плоче је одређен са поларним координатама ***r*** и φ.



Диференцијална једначина савијања кружне плоче:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\cdot\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\right)\left(\frac{\partial^2 w}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial w}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\cdot\frac{\partial^2 w}{\partial\varphi^2}\right)=\frac{Z(r,\varphi)}{K}$$

Пресечне силе:



Ротациона симетрија

Када су гранични услови и оптерећење ротационо симетрични, само су функција координате ***r*** , онда диференцијална једначина савијања плоче постаје:

$$\frac{d^4 w}{dr^4}+\frac{2}{r}\cdot\frac{d^3 w}{dr^3}-\frac{1}{r^2}\cdot\frac{d^2 w}{dr^2}+\frac{1}{r^3}\cdot\frac{dw}{dr}=\frac{Z(r)}{K}$$

Ово је Ојлерова диференцијална једначина. Решење се претпоставља као збир хомогеног w_1 и партикуларног решења w_0: $w= w_1+ w_0$.

Да би се одредило хомогено решење уводи се смена $r= e^t$ и диференцијална једначина постаје:
$\frac{d^4 w_1}{dt^4}-4\cdot\frac{d^3 w_1}{dt^3}+4\cdot\frac{d^2 w_1}{dt^2}=0$. Када се w_1 претпостави у облику $w_1= e^{kt}$ добија се:

$$k^4-4\cdot k^3+4\cdot k^2=0$$

$$k^2\cdot\left(k^2-4\cdot k+4\right)=0$$

$$k^2\cdot(k-2)^2=0\Rightarrow\; k_{1,2}=0;\; k_{3,4}=2$$

$$\boxed{w_1=A+B\cdot\ln r+C\cdot r^2+D\cdot r^2\cdot\ln r}$$

Одређивање партикуларног решења $\boldsymbol{w_0}$:

$$\left(\frac{d^2}{dr^2}+\frac{1}{r}\cdot\frac{d}{dr}\right)\left(\frac{d^2 w_0}{dr^2}+\frac{1}{r}\cdot\frac{dw_0}{dr}\right)=\frac{Z(r)}{K}$$

Израз у другој загради именујемо као:

$$\frac{d^2 w_0}{dr^2}+\frac{1}{r}\cdot\frac{dw_0}{dr}=-\frac{M}{K}$$ ....*(1)*, па је:

$$\frac{d^2 M}{dr^2}+\frac{1}{r}\cdot\frac{dM}{dr}=-\frac{Z(r)}{K}$$ .... *(2)*.

Израз *(2)* помножимо са ***r*** и изинтегралимо:

$\frac{1}{r}\cdot\frac{d}{dr}\left(r\cdot\frac{dM}{dr}\right)=-Z(r)/\cdot r/\int$ и добијамо израз: $r\cdot\frac{dM}{dr}=-\int Z(r)\cdot rdr$ који множимо са $\frac{1}{r}$ и интегралимо, па је:

$M=-\int\frac{dr}{r}\int Z\cdot rdr$, односно $\boxed{w_0=-\frac{1}{K}\int\frac{dr}{r}\int M\cdot rdr}$

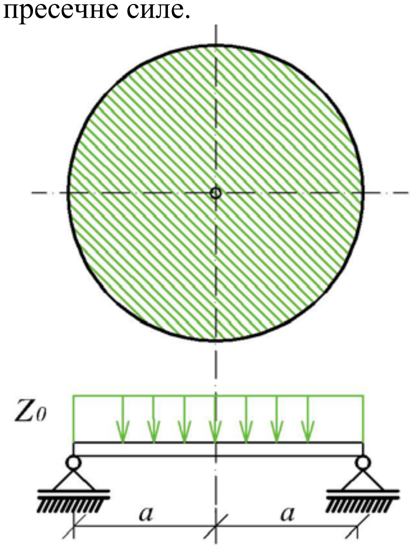
Изрази за пресечне силе у функцији угиба ***w*** за случај ротационе симетрије:

$$M_r=-K\cdot\left(\frac{d^2 w}{dr^2}+\frac{\nu}{r}\cdot\frac{dw}{dr}\right);\quad M_\varphi=-K\cdot\left(\frac{1}{r}\cdot\frac{dw}{dr}+\nu\cdot\frac{d^2 w}{dr^2}\right)$$

$$T_r=-K\cdot\left(\frac{d^3 w}{dr^3}+\frac{1}{r}\cdot\frac{d^2 w}{dr^2}-\frac{1}{r^2}\cdot\frac{dw}{dr}\right);\quad M_{r\varphi}\equiv 0;\quad T_\varphi\equiv 0$$

Пример 1.

За кружну плочу оптерећену константним површинским оптерећењем, приказану на слици, одредити израз за угиб и пресечне силе.



$E = 30\ Gpa$

$\nu = 0.2$

$dpl = 0.20\ m$

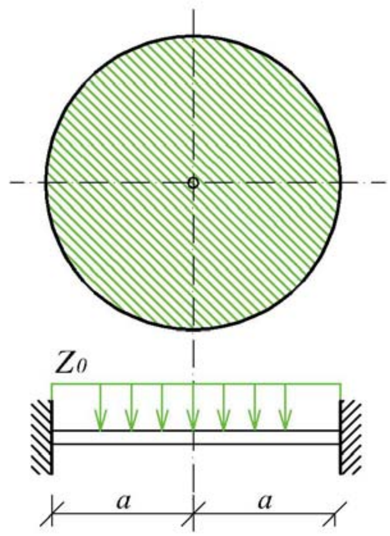
$Z_0 = 100\ kN/m^2$

$a = 3\ m$

Решење

Пример 2.

За кружну плочу оптерећену константним површинским оптерећењем, приказану на слици, одредити израз за угиб и пресечне силе.

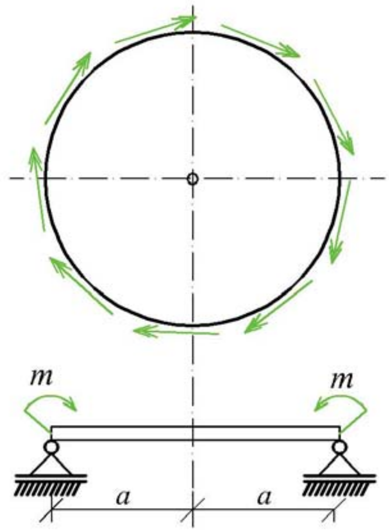


E=30 Gpa
$\nu = 0.2$
dpl = 0.20 m
$Z_0 = 100\ kN/m^2$
a = 3 m

Решење

Пример 3.

За кружну плочу оптерећену моментима савијања по контури, приказану на слици, одредити израз за угиб и пресечне силе.



Решење